Chapter 1

Algoritmi "Greedy"

1.1 Problema dello zaino

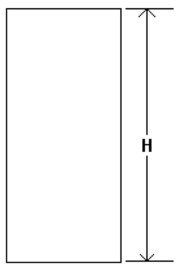

Figure 1.1: Knapsack.

1.1.1 Formalizzazione del problema

Il problema dello 0-1 zaino ("0-1 Knapsack") è un problema di ottimizzazione. Un ladro ha disposizione uno zaino di altezza H in sui inserire gli oggetti che ruba. Il suo scopo è quello di rubare il valore piu' alto possibile avendo come vincolo l'altezza massima dello zaino.
Formalmente, ogni oggetto ha due parametri, un valore v_i e una altezza h_i. I vincoli da rispettare sono i seguenti:

$$max \sum_{i=1}^{n} x_i v_i,$$

dove $x_i \in \{0, 1\}$ e $x_i = 1$ rappresenta il furto dell'oggetto, $x_i = 0$ l'abbandono.
Abbiamo inoltre il vincolo:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i h_i \leq H.$$

1.1.2 Soluzione del problema

Una possibile soluzione consiste nell'applicare un semplice algoritmo "greedy" che consiste nello scegliere gli elementi in sequenza e nell'inserirli fino a quando il sacco non è pieno.

```
Zaino(H)
begin
          carico:=0;
          hmax:=H;
          for i:=1 to n do
          if (hmax >= h[i]) then
                                 begin
                                   x[i]:=1;
                                   carico:=carico+v[i];
                                   hmax:=hmax-h[i];
                                 end
                               else x[i]:=0
end.
```

Tale algoritmo benche' trattabile (la sua complessità è $O(n)$) non produce la soluzione ottima. Infatti è troppo influenzato dal caso. Se all'inizio il ladro prende oggetti di dimensioni notevoli ma di valore infimo si ritroverà presto ad aver riempito il sacco, ma non avrò rubato un granche'.

Un possibile miglioramento dell'algoritmo consiste nell'eseguire prima un preordinamento decrescente degli oggetti in base alla densità di valore calcolata come segue:

$$d_i = \frac{v_i}{h_i}$$

L'ordinamento costa $O(n \log n)$ passi. Neanche applicando il preordinamento si ottiene però si ottiene una soluzione ottima.

Si può invece risolvere una variante del problema che consiste nel poter spezzare gli oggetti ("fractional-knapsack") e in questo caso la soluzione con preordinamento risulta ottima.