Problema dello Zaino Frazionario (o Continuo)

Vincenzo Russo (vincenzo.russo@neminis.org)

Sommario

In questo documento ci occuperemo di dimostrare che il problema dello zaino frazionario (o continuo) soddisfa la proprietà di sottostruttura ottima e la proprietà della scelta greedy.

1 Formalizzazione del problema

Sia $O = \{o_1, o_2, ..., o_n\}$ un insieme di n oggetti. Indicheremo con p_i il peso dell'i-mo oggetto e con c_i il valore. Indicheremo con $v_i = \frac{c_i}{p_i}$ il profitto dell'oggetto o_i.

Sia P la capacità di uno zaino.

Vogliamo trovare una configurazione $X =< x_1, x_2, ..., x_n >$, con $0 \leq x_i \leq 1$ rappresentante la porzione di oggetto o_i inserita nello zaino (ovvero la percentuale di peso) tale che:

1. $\sum_{i=1..n} x_i p_i \leq P$ (vincolo di ammissibilità)
2. $max \sum_{i=1..n} x_i v_i$ (vincolo di ottimalità)

Dato che possiamo prendere porzioni di oggetti, il vincolo di ammissibilità si traduce in realtà in uguaglianza esatta:

$$\sum_{i=1..n} x_i p_i = P$$

Il problema dello zaino frazionario, quindi, ammette sempre una soluzione massimale, al contrario del problema dello zaino discreto, del quale lo zaino frazionario è il rilassamento continuo.

2 Risoluzione del problema

Il problema dello zaino frazionario può essere risolto con tecnica greedy, ordinando gli oggetti in ordine non crescente rispetto al profitto v_i e inserendo gli oggetti nello zaino in questo ordine finché, per qualche j ($1 \leq j \leq n$), p_j non è maggiore della capacità residua dello zaino, P_r. A questo punto inseriremo nello zaino una porzione $x_j = \frac{P_r}{p_j}$ dell'oggetto p_j (che chiameremo oggetto critico).

3 Correttezza della soluzione

Indicheremo nel seguito con $Q_{n,P}$ il problema con n oggetti e zaino di capacità P. Inoltre indicheremo con X_n una soluzione al problema $Q_{n,P}$, tale che $X_n =< x_1, x_2, ..., x_n >$.

Consideriamo quindi il problema $Q_{n,P}$ e una sua soluzione arbitraria X_n.

In quanto soluzione, X_n rispetta il vincolo di ammissibilità $\sum_{i=1..n} x_i p_i = P$.

Consideriamo ora il problema $Q_{n-1,P-x_n p_n}$, il sottoproblema di $Q_{n,P}$ con $n-1$ oggetti e uno zaino di capacità $P - x_n p_n$, con p_n peso dell'oggetto eliminato per creare il sottoproblema di dimensione $n-1$[1].

Sia Y_{n-1} una soluzione aribitraria del sottoproblema appena esposto, tale che la soluzione rispetti il vincolo di ammissibilità. Allora $Y_{n-1} \oplus x_n$[2] è una soluzione per il problema $Q_{n,P}$.

Dimostrazione. Per il problema $Q_{n,P-x_n p_n}$ abbiamo che $\sum_{i=1..n-1} y_i p_i = P - x_n p_n$. Concatenando Y_{n-1} a x_n otteniamo $x_n p_n + \sum_{i=1..n-1} y_i p_i = P - x_n p_n + x_n p_n = P$.

4 Caratterizzazione della struttura di una solzuzione ottima

Sia X_n una soluzione ottima per $Q_{n,P}$. Indichiamo con $C_{n,P}$ il valore di una soluzione ottima per $Q_{n,P}$. Esso è definito come $C_{n,P} = \sum_{i=1..n} x_i v_i$ ed è il massimo valore, essendo X_n ottima. Allora si dimostra che X_{n-1} è una soluzione ottima per $Q_{n-1,P-x_n p_n}$, tale che $C_{n-1,P-x_n p_n} = \sum_{i=1..n-1} x_i v_i$ è massimo.

Dimostrazione. Se X_{n-1} non fosse ottima, allora sarebbe possibile trovare una soluzione X'_{n-1} tale che $C'_{n-1,P-x_n p_n} = \sum_{i=1..n-1} x'_i v_i < C_{n-1,P-x_n p_n} = \sum_{i=1..n-1} x_i v_i$; questo porterebbe a calcolare un $C'_{n,P} = C'_{n-1,P-x_n p_n} + x_n v_n < C_{n,P}$, ma ciò ci indurrebbe in contraddizione, poiché la soluzione $X'_n = X'_{n-1} \oplus x_n$[3] sarebbe migliore di X_n che era stata supposta ottima. Pertanto X_{n-1} deve essere necessariamente ottima.

[1] Si sottrae a P la quantità $x_n p_n$ in modo da considerare in una sola espressione tutti i possibili sottoproblemi. Infatti, se $x_n = 0$ allora abbiamo un problema dello zaino frazionario con $n-1$ oggetti e capacità P, mentre se $0 < x_n \leq 1$ allora la capacità P viene decurtata di una quantità pari alla percentuale di peso inserita nello zaino dell'oggetto o_n.

[2] L'operatore $\oplus$ indica la concatenazione tra gli elementi della soluzione Y_{n-1} e l'elemento x_n.

[3] La composizione è possibile per la già dimostrata correttezza della soluzione.

5 Proprietà della scelta greedy

Supponiamo che o_h sia l'oggetto con miglior rapporto $\frac{c_h}{p_h} = v_h$ e ipotizziamo $p_h < P$[4].

Consideriamo il problema $Q_{n,P}$ e un'arbitraria soluzione ottima ad esso $X_n =< x_1, x_2, ..., x_h, ..., x_n >$ tale che $C_{n,P} = \sum_{i=1..n} x_i v_i$.

Vogliamo dimostrare che:

1. l'oggetto o_h deve essere interamente contenuto in ogni soluzione ottima
2. l'oggetto o_h può essere sempre scelto per primo

Dimostrazione. Supponiamo $x_h < 1$ (ovvero l'oggetto o_h non è stato preso interamente nella soluzione ottima X_n). Consideriamo un oggetto o_j con $j \neq h$ e tale che $0 < x_j \leq 1$ e $p_j \geq p_h - x_h p_h$. Senza perdita di generalità, supponiamo $j = h - 1$. Immaginiamo ora di eliminare una certa percentuale t con $0 < t \leq 1 - x_h$ da x_j e la stessa percentuale l'aggiungiamo a x_h, in modo da avere una nuova soluzione $X_n^{'} =< x_1, x_2, ..., x_j - t, x_h + t, ...x_n >$ tale che

$C_{n,P}^{'} = \sum_{i=1..j-1} x_i v_i + (x_j - t)v_j + (x_h + t)v_h + \sum_{i=h+1..n} x_i v_i.$

Possiamo riscrivere $C_{n,P}$ come

$C_{n,P} = \sum_{i=1..j-1} x_i v_i + x_j v_j + x_h v_h + \sum_{i=h+1..n} x_i v_i$

e dimostrare che $C_{n,P}^{'} > C_{n,P}$, arrivando a contraddire l'ipotesi di ottimalità di X_n e dimostrando, pertanto, che $x_h = 1$ se X_n è ottima.

Infatti ci basta dimostrare che $(x_j - t)v_j + (x_h + t)v_h > x_j v_j + x_h v_h$,

ovvero $x_j v_j - tv_j + x_h v_h + tv_h > x_j v_j + x_h v_h$,

ovvero $tv_h > tv_j$,

ovvero $t\frac{c_h}{p_h} > t\frac{c_j}{p_j}$,

ovvero $\frac{c_h}{p_h} > \frac{c_j}{p_j}$

che è banalmente vero, poiché abbiamo supposto o_h l'oggetto con migliore profitto. Da questo, segue l'asserto 1.

L'asserto 2 segue banalmente, poiché se o_h è stato scelto in posizione $k \neq 1$, sarà sempre possibile sceglierlo come primo oggetto, poiché l'ordine degli oggetti nella soluzione non influisce sull'ammissibilità e l'ottimalità della stessa.

[4] Si ipotizza, in pratica, che l'oggetto con miglior profitto non sia l'oggetto critico, al fine di semplificare i passaggi matematici a favore di una maggior chiarezza nell'esposizione. Non è arduo, ad ogni modo, effettuare la dimostrazione nel caso in cui l'oggetto o_h sia in effetti l'oggetto critico.

Riferimenti bibliografici

[1] Thomas H. Cormen et al., *Introduction to algorithms, Second Edition*, MIT Press, 2001

[2] *Rilassamenti ed euristiche* (http://it.wikipedia.org/wiki/Ricerca_operativa#Rilassamenti_ed_Euristiche)