ALGORITMI MATEMATICI RISOLUTIVI RELATIVI A PROBLEMI ECONOMICO FINANZIARI E/O AZIENDALI

PREMESSA

Il problema che si intende affrontare è “gestione del magazzino: determinazione del lotto economico di acquisto e problematiche connesse”. Tale problema rappresenterà una unità didattica la cui collocazione curriculare è in una quarta classe dell’Istituto Tecnico Commerciale, indirizzo Igea, per lo svolgimento della quale è prevista una lezione di circa due ore e collocato in un modulo relativo alle applicazioni economiche di massimi, minimi e derivate. La determinazione del lotto economico di acquisto è considerata tradizionalmente un problema particolare di ottimizzazione, e come tale trattato di solito nella quinta classe. Si è scelto di collocare il problema nella quarta classe in modo da consentire la trattazione del tema da un punto di vista interdisciplinare, visti i risvolti di carattere giuridico dello stesso, dal punto di vista della scelta del contratto con cui l’impresa provvede all’approvigionamento delle scorte e le implicazioni economico – finanziarie della gestione del magazzino sulla complessiva gestione aziendale, tematiche trattate dallo studente rispettivamente in Diritto e in Economia Aziendale appunto in Quarta.

Per affrontare proficuamente la suddetta unità didattica sono richieste allo studente le seguenti conoscenze: analisi di funzioni a una variabile (specificamente le regole di derivazione e i limiti), rappresentazioni grafiche (in particolare di retta e iperbole), analisi dei costi aziendali (sotto il profilo della diversa incidenza sulla gestione dei costi fissi e dei costi variabili), conoscenza delle funzioni principali del foglio elettronico, uso di alcune funzioni logiche predefinite (funzioni SE ed E), dei riferimenti assoluti e relativi per quanto riguarda le applicazioni in laboratorio di informatica. L’unità didattica persegue l’obiettivo generale di mettere lo studente in grado di conoscere la dinamica dei costi di magazzino, sotto il profilo della diversa incidenza dei costi fissi e di quelli variabili sulla complessiva gestione aziendale, e quello specifico di tradurre in un modello matematico le problematiche relative alla determinazione del lotto economico di acquisto e le problematiche connesse (numero di ordinazioni da effettuare nell’arco di tempo considerato, tempo di rinnovo del magazzino, rappresentazione grafica dei costi relativi al magazzino), in modo da superare i criteri basati su intuizioni soggettive con i quali per lungo tempo i responsabili della gestione aziendale hanno deciso le scorte di merce da conservare (stock).

I contenuti disciplinari saranno di conseguenza i seguenti: determinazione del lotto economico di acquisto, del numero di ordinazioni da effettuare nell’arco di tempo considerato, del tempo intercorrente tra le diverse ordinazioni, rappresentazione della funzione di costo totale di magazzino in un sistema cartesiano. Per la trattazione dell’argomento, dopo la verifica dei prerequisiti, la metodologia sarà basata sulla lezione frontale accompagnata dall’esame di un caso pratico per l’esposizione e la sistematizzazione dei concetti di base e dell’algoritmo risolutivo, su ipotesi di lavoro da svolgere in classe e con l’ausilio del foglio elettronico per il rinforzo e la verifica sommativa.

Circa l’eventuale recupero di carenze accertate con le verifiche in itinere e con quella finale, premesso che un intervento fattivo richiede la cooperazione degli alunni che devono essere adeguatamente motivati, questo avverrà partendo da schemi a blocchi o mappe forniti agli studenti che evidenziano il percorso logico dell’unità didattica sviluppata. Mappa e schede possono essere lasciate volutamente incomplete e in tal caso rappresenteranno un utile strumento di esercitazione. La classe verrà divisa in gruppi i quali formuleranno al docente domande relative a dubbi emersi dall’esame della suddetta mappa o degli schemi, alle quali risponderà il docente stesso o uno studente - tutor. I gruppi in attesa possono nel frattempo allenarsi con il self screening.

CONTENUTI

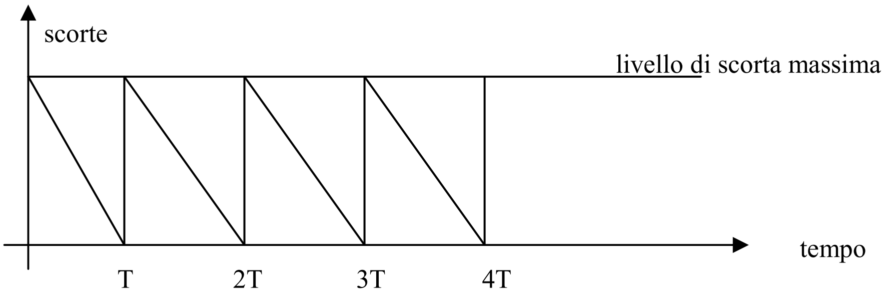
Le scorte in un’azienda assolvono alla funzione primaria di evitare ritardi nella evasione degli ordini alla clientela (nelle aziende mercantili) e di non determinare interruzioni nel processo tecnico di lavorazione (in quelle industriali).

La quantità di merci che in ogni momento dovrebbe essere presente in magazzino è quella che consente di massimizzare l’economicità della gestione aziendale, tenendo conto di vincoli tecnici, quali la capacità fisica del magazzino, dei costi originati dallo stoccaggio delle merci e dalla loro ordinazioni, dalla necessità di evadere prontamente gli ordini.

Nella sua completezza, il problema delle scorte sarebbe un problema di scelta in condizioni di incertezza: al fine comunque di giungere ad una modellizzazione soddisfacente dello stesso si possono assumere due ipotesi semplificatrici:

1. si suppone che il consumo delle scorte sia uniforme nel tempo
2. si suppone che la merce giunga prontamente in magazzino appena terminano le scorte precedenti.

Si può a questo punto tracciare il seguente grafico dell'andamento delle scorte di magazzino:



L'andamento a dente di sega del grafico mostra come ad esaurimento delle scorte si ha un immediato reintegro delle stesse. Avendo supposto un consumo uniforme nel tempo T, il livello delle scorte decresce in modo rettilineo e diventa nullo un istante prima dell'arrivo della successiva ordinazione.

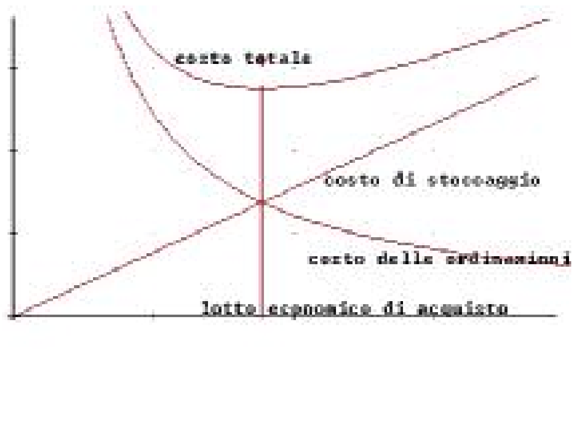
Possiamo ora suddividere i costi relativi alle scorte in due categorie:

- costi di ordinazione, relativi alla gestione amministrativa delle scorte (posta, segreteria, telefono, ecc.), indipendenti dalla quantità ordinata e in seguito indicati con C_0 (che può essere considerato una quantità fissa);
- costi di stoccaggio, relativi alle spese di magazzinaggio (affitto dei locali, assicurazione, eventuale deterioramento della merce, costi relativi all'immobilizzo dei capitali, ecc), in seguito indicati con C_u (costo unitario per spese di magazzinaggio).

Gli altri simboli che saranno utilizzati in seguito sono:

- **Q, fabbisogno complessivo di merce nel periodo considerato, solitamente l'anno;**
- **X, quantità di merce da ordinare ogni volta.**

Essendo noto il fabbisogno di merce del periodo, il numero di ordini da effettuare è **n = Q/x,** quindi il costo delle ordinazioni sarà $\mathbf{C_0 * Q/x}$. I costi complessivi per la gestione del magazzino sono pari invece al prodotto tra il costo unitario $\mathbf{C_u}$ e la giacenza media, cioè la quantità di merce che mediamente si trova in magazzino, data dalla semisomma del valore massimo (x) e quello minimo (0): $\mathbf{C_u * x/2}$.
Da quanto detto, appare che i costi di stoccaggio delle merci rappresentano costi variabili: aumentano cioè al crescere della quantità fisica di merci presente in magazzino in misura proporzionale a quello che è il costo unitario di stoccaggio: C_u. I costi relativi all'ordinazione, invece essendo una quantità fissa C_0 indipendente dalla quantità acquistata, avranno un andamento iperbolico decrescente, il che da un punto di vista economico significa che la loro incidenza sulla gestione diminuisce al crescere della quantità acquistata. In definitiva, al crescere della quantità acquistata il costo di stoccaggio cresce mentre quello di ordinazione diminuisce. Il costo totale del magazzino sarà dato dalla somma di questi due costi, e la sua funzione sarà rappresentata quindi dalla somma relative funzioni. Avendo le dette funzioni, quella che esprime il costo di stoccaggio e quella che esprime il costo di ordinazione inclinazione differente, si incontreranno in un punto: quel punto corrisponderà al punto di minimo del costo totale di magazzino. La situazione è rappresentata dal seguente grafico:



Arriviamo ora al modello matematico per il problema delle scorte, indicando con $C_{(x)}$ la funzione del costo totale:

$$C_{(x)} = C_0 * Q/x + C_u * x/2$$

Vediamo innanzitutto come questa funzione sia del tipo y = ax + b/x, con i coefficienti a e b entrambi positivi. Essa è definita per ogni $x \in \mathbf{R}_0$ ed è positiva per x > 0.
La funzione presenta i seguenti limiti:

$$\lim_{y \to 0+} y = +\infty \qquad \lim_{y \to 0-} y = -\infty$$

$$\lim_{y \to \infty} y = +\infty \qquad \lim_{y \to \infty} y = -\infty$$

Giacché

$$\lim_{x \to \infty} \left(a \cdot x + \frac{b}{x} - a \cdot x = 0 \right)$$

e

$$\lim_{x \to 0} \left(a \cdot x + \frac{b}{x} \right) = \infty$$

la retta di equazione **y = ax** è asintoto obliquo e l'asse delle ordinate un asintoto verticale.

La derivata prima della funzione è:

$$y = a - \frac{b}{x^2} = \frac{a \cdot x^2 - b}{x^2}$$

Essa è uguale a zero per

$$x = \pm \sqrt{\left(\frac{b}{a} \right)}$$

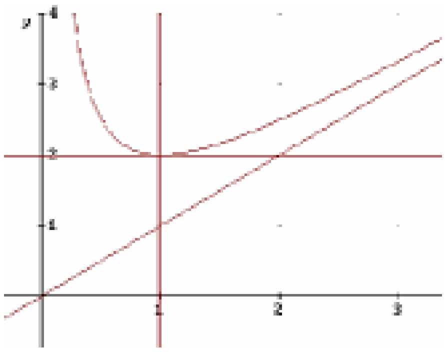
e positiva per valori esterni all'intervallo definito da valori esterni alle radici. Il punto di ascissa positivo corrisponde quindi a un minimo; non teniamo conto del punto di ascissa negativa in quanto economicamente non significativo.

Le coordinate del suddetto punto di minimo sono quindi:

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{a} \right)}$$

$$y = 2 \cdot \sqrt{(a \cdot b)}$$

L’andamento del grafico della funzione di costo è il seguente:



In pratica

Un supermercato vende settimanalmente una media di 340 pacchi di pasta. Il costo per ogni ordinazione è di 55000 lire. Le spese di gestione della merce in magazzino, e sugli scaffali, sono di 155 lire per pacco. Determiniamo la quantità di merce da ordinare per minimizzare il costo totale di magazzino, il numero di ordinazioni complessive in un anno e il tempo intercorrente tra un’ordinazione e un’altra.

Il fabbisogno totale di merce Q in un anno è:

$$\mathbf{Q = 340*52 = 17680 \text{ pacchi}}$$

E il costo totale è:

$$c \cdot x = 55000 \cdot \frac{17680}{x} + 155 \cdot \frac{x}{2}$$

Il modello matematico sarà quindi il seguente:

$$\mathbf{C_x = 77{,}5x + (972400000/x)} \text{ da rendere minima} \quad \mathbf{x \in N}$$

La derivata prima della funzione è:

$$\frac{155}{2} - \frac{972400000}{x^2}$$

Che si annulla per **x ≈ 3542**, a cui corrisponde un costo per ordinazione **y ≈ 549039 lire**
Il numero di ordinazioni da effettuare in un anno è **n = Q/n = 17680/3542 ≈ 5**,
Il tempo intercorrente tra un’ordinazione e la successiva è: **T = 365/5 ≈ 73 giorni**.

Passiamo adesso alla rappresentazione grafica della funzione di costo. Il suo campo di esistenza è per $x \neq 0$, verifichiamo quindi il comportamento della funzione per $x \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \to 0} \left(55000 \cdot \frac{17680}{x} + 155 \cdot \frac{x}{2} \right) = \infty$$

L’asse delle ordinate è quindi un asintoto orizzontale.
Verifichiamo ora l’esistenza di asintoti orizzontali o obliqui:

$$\lim_{x \to \infty} \left(55000 \cdot \frac{17680}{x} + 155 \cdot \frac{x}{2} \right)$$

Il valore di questo limite è ∞, ciò dimostra l’esistenza di un asintoto obliquo, di cui determiniamo i coefficienti a e b:

$$\lim_{x \to \infty} \left(55000 \cdot \frac{17680}{x} + 155 \cdot \frac{x}{2} \right) \cdot \frac{1}{x}$$

il valore di questo limite è 155/2, coefficiente angolare dell'asintoto obliquo. Il valore di a sarà:

$$\lim_{x \to \infty} \left(55000 \cdot \frac{17680}{x} + 155 \cdot \frac{x}{2} = 0 \right)$$

L'equazione dell'asintoto è quindi: y = (155/2)x

Abbiamo già visto che le coordinate del punto di minimo della funzione sono (x ≈ 3542; y ≈ 549039). Possiamo passare perciò alla rappresentazione grafica: