Problema del trasporto

Supponiamo di avere m *depositi* in cui è immagazzinato un prodotto e n negozi che richiedono tale prodotto.

Nel deposito i è immagazzinata la quantità a_i di prodotto.
Nel negozio j si richiede la quantità b_j di prodotto.

È noto che il costo di trasporto di un'unità di prodotto dal deposito i al negozio j è pari a c_{ij}.

Il problema del trasporto consiste nel determinare quale quantità di prodotto inviare da ciascun deposito verso ciascun negozio in modo tale da minimizzare il costo complessivo di trasporto, rispettando i vincoli sulle quantità di prodotto presenti in ciascun deposito e quelli di richieste di ciascun negozio.

Ipotesi iniziale

Si suppone sempre che la quantità totale immagazzinata in tutti i depositi sia pari alla quantità totale richiesta da tutti i magazzini, ovvero

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Non si tratta comunque di un'ipotesi restrittiva dal momento che ci si può sempre ricondurre ad essa.

Infatti ...

...si supponga che

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

cioè nei depositi vi sia più prodotto di quanto effettivamente richiesto dai negozi. Per soddisfare l'ipotesi basta aggiungere un negozio fittizio $n+1$ con

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

e con $c_{i,n+1} = 0$ per ogni $i,\ i = 1, \ldots, m$, cioè il costo del trasporto verso il negozio fittizio è pari a 0. La quantità di prodotto che un deposito invia a un negozio fittizio resta in realtà immagazzinata nel deposito.

Analogamente ...

... si supponga che

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

cioè nei depositi vi sia meno prodotto di quanto effettivamente richiesto dai negozi. Per soddisfare l'ipotesi basta aggiungere un deposito fittizio $m+1$ con

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i,$$

e con $c_{m+1,j} = 0$ per ogni $j,\ j = 1, \ldots, n$, cioè il costo del trasporto dal deposito fittizio è pari a 0. La quantità di prodotto che un negozio riceve da un deposito fittizio equivale in realtà a una richiesta non soddisfatta per quel negozio.

Grafo bipartito associato

Possiamo associare al problema un grafo bipartito completo $K_{m,n}$ dove su un lato della bipartizione compaiono i nodi corrispondenti ai depositi, numerati da 1 a m, mentre sull'altro lato della bipartizione compaiono i nodi corrispondenti ai negozi, numerati da $m+1$ a $m+n$

Esempio

	Negozio 1	Negozio 2	Negozio 3	Disponibilità
Deposito 1	4	7	5	30
Deposito 2	2	4	3	20
Richiesta	15	10	25	

Modello matematico - variabili

Ad ogni coppia deposito i-negozio j associamo una variabile:

$x_{ij} =$ quantità di prodotto inviata dal deposito i verso il negozio j.

Tale quantità dovrà essere ovviamente non negativa e tipicamente intera (non frazionabilità del prodotto trasportato), ovvero:

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{intero} \quad i = 1, \ldots, m \;\; j = 1, \ldots, n.$$

Modello matematico - vincoli depositi

Per ogni deposito i la quantità totale di prodotto inviata da esso deve essere pari alla quantità di prodotto a_i in esso immagazzinata. La quantità totale di prodotto inviata dal deposito i è data dalla formula $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ e quindi per ogni deposito i avremo il seguente vincolo:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1, \ldots, m.$$

Nell'esempio

Deposito 1:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 30$$

Deposito 2:

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 20$$

Modello matematico - vincoli negozi

Per ogni negozio j la quantità totale di prodotto ricevuta da esso deve essere pari alla quantità di prodotto b_j da esso richiesta. La quantità totale di prodotto ricevuta dal negozio j è data dalla formula $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$ e quindi per ogni negozio j avremo il seguente vincolo:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1, \ldots, n.$$

Nell'esempio

Negozio 1:

$$x_{11} + x_{21} = 15$$

Negozio 2:

$$x_{12} + x_{22} = 10$$

Negozio 3:

$$x_{13} + x_{23} = 25$$

Modello matematico - obiettivo

Se inviare un'unità di prodotto dal deposito i al negozio j ha costo pari a c_{ij}, inviarne una quantità x_{ij} ha costo pari a $c_{ij}x_{ij}$. Sommando su tutte le possibili coppie deposito-negozio, abbiamo la seguente formula per l'obiettivo:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}.$$

Nell'esempio:

$$4x_{11} + 7x_{12} + 5x_{13} + 2x_{21} + 4x_{22} + 3x_{23}$$

Modello matematico finale

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & \\ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & i = 1, \ldots, m \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & j = 1, \ldots, n \\ & x_{ij} \geq 0 \ \text{ interi} & i = 1, \ldots, m \ j = 1, \ldots, n \end{array}$$

Nell'esempio

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 4x_{11} + 7x_{12} + 5x_{13} + 2x_{21} + 4x_{22} + 3x_{23} \\
& x_{11} + x_{12} + x_{13} = 30 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} = 20 \\
& x_{11} + x_{21} = 15 \\
& x_{12} + x_{22} = 10 \\
& x_{13} + x_{23} = 25 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \ \text{ interi}
\end{aligned}
$$

In forma matriciale

- $\mathbf{x}$ è il vettore di variabili di dimensione mn con componenti le variabili x_{ij};
- $\mathbf{c}$ è un vettore di dimensione mn la cui componente associata alla coppia deposito i-negozio j è pari a c_{ij};
- $\mathbf{d}$ è un vettore di dimensione $m+n$ la cui i-esima componente, $i = 1, \ldots, m$, è pari ad a_i, mentre la sua $(m+j)$-esima componente, $j = 1, \ldots, n$, è pari a b_j.
- $\mathbf{M}$ è una matrice di ordine $(m+n) \times mn$ che coincide con la matrice di incidenza nodo-arco del grafo bipartito completo associato al problema del trasporto.
- $\mathbf{0}$ è il vettore con tutte le componenti pari a 0.

il problema si scrive nella seguente forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{cx} \\ & \mathbf{Mx} = \mathbf{d} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

dove:

- $\mathbf{cx} \leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$;
- $\mathbf{Mx} = \mathbf{d} \leftrightarrow$
  $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \forall\, i = 1, \ldots, m, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \forall\, j = 1, \ldots, n$.

Nell'esempio

Vettore $\mathbf{c}$:

$$(4 \quad 7 \quad 5 \quad 2 \quad 4 \quad 3)$$

Vettore $\mathbf{d}$:

$$(30 \quad 20 \quad 15 \quad 10 \quad 25)$$

Matrice $\mathbf{M}$:

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}
Dep. 1	1	1	1	0	0	0
Dep. 2	0	0	0	1	1	1
Neg. 1	1	0	0	1	0	0
Neg. 2	0	1	0	0	1	0
Neg. 3	0	0	1	0	0	1

Complessità

Essendo $\mathbf{M}$ matrice di incidenza nodo-arco di un grafo bipartito, essa è TU. Se il vettore $\mathbf{d}$ ha componenti tutte intere (cioè se i valori a_i e b_j sono interi), possiamo concludere che il problema del trasporto può essere risolto come problema di PL e quindi è risolvibile in tempo polinomiale.

Osservazione

Il problema del trasporto può anche essere visto come caso particolare del problema del flusso a costo minimo. Come?

Tra gli algoritmi di risoluzione per esso abbiamo l'algoritmo del simplesso che non vedremo ma è riportato sulle dispense. I passi dell'algoritmo sono implementati in modo simile a quelli del simplesso per problemi di flusso a costo minimo.