Problemi di trasporto

Consideriamo un problema di programmazione lineare con una struttura matematica particolare. Si può utilizzare, per risolverlo, il metodo del simplesso ma è possibile realizzare una procedura risolutiva più semplice e più veloce. A causa della grande diffusione di queste problematiche, si è sviluppato un vero e proprio metodo risolutivo, così da individuare una sottoclasse di problemi di PL, appunto i *problemi di trasporto*.
Si supponga che vi siano *m sorgenti* o *origini* o *centri di offerta* O_i, di un certo prodotto ed n *destinazioni* o *centri di domanda* D_j. Le quantità prodotte nelle sorgenti sono a_i e le quantità richieste dalle destinazioni sono b_j. Il costo di trasporto (o il costo di magazzini, o ancora il costo di vendita) dal centro i al centro j sia c_{ij}. Inoltre x_{ij} rappresenta la quantità di un prodotto che dall'origine i deve arrivare alla destinazione j.

Il tipico problema problema di trasporto si può descrivere con:

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1,2,\ldots,m$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1,2,\ldots,n$$
$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,2,\ldots,m; \quad j = 1,2,\ldots,n$$

Supponiamo inoltre che la domanda sia eguale all'offerta, ossia che il *problema* sia *bilanciato* che:

$$\sum a_i = \sum b_j \quad (*)$$

Quest'ultima condizione è facilmente ottenibile in quanto se l'offerta supera la domanda, si può introdurre un cliente fittizio; se la domanda supera l'offerta si può aggiungere un produttore fittizio.
Come si nota i vincoli sono $n+m$ non tutti linearmente indipendenti per la presenza della relazione di bilanciamento. Il problema però è già in forma standard.

Si costruisce la *tabella delle allocazioni*.

	D_1	D_2	...	D_j	...	D_n	
O_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1j}	...	x_{1n}	a_1
O_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2j}	...	x_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...	...	...
O_i	x_{i1}	x_{i2}	...	x_{ij}	...	x_{in}	a_i
...	...	...	...	...	...	...	...
O_m	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mj}	...	x_{mn}	a_m
	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n	$\Sigma a_i = \Sigma b_j$

La determinazione della soluzione ottima viene effettuata attraverso una sequenza di $m+n-1$ passi.
La procedura risolutiva si alterna in tre passi fondamentali:

1. scelta di una posizione (i,j)
2. cancellazione della riga i (o della colonna j)
3. modifica della colonna j (o della riga i). Ritornare al passo 1.

Soltanto l'operazione (1) differisce a seconda del metodo adottato.

- ***Metodo dell'angolo di Nord-Ovest***

  La posizione (i,j) scelta è quella in alto a sinistra (Nord-Ovest) della tabella corrente. In questo metodo la scelta viene effettuata in base ad una convenzione senza tener conto dei coefficienti di costo.

- ***Metodo dei minimi costi***

  La posizione (i,j) scelta è una di quelle in cui il costo è di volta in volta minimo per l'intera tabella. Il metodo tiene conto della convenienza relativa delle varie possibili allocazioni e risulta più conveniente del metodo precedente.

- ***Metodo di Vogel***

  In corrispondenza ad ogni vincolo (riga e colonna) si determinano i valori assoluti degli scarti fra i due costi migliori, che chiamiamo p_i (i=1,2,...,m) e q_j (j=1,2,...,n). Si seleziona il vincolo (riga o colonna) avente lo scarto massimo. La posizione (i,j) è quella del minimo costo della riga o colonna selezionata. Tale metodo risulta in genere migliore dei precedenti, in quanto per ogni vincolo si determina la penalità minima che si deve pagare se non si alloca nella posizione a minimo costo. Si sceglie il vincolo col massimo scarto perché è il più penalizzante.

Esempio

	1	2	3	4	Prodotti
1	13	36	18	32	12
2	22	15	8	12	4
3	7	30	11	21	8
4	3	20	5	14	10
Richiesta	9	7	7	11	34

Metodo dell'angolo di Nord-Ovest

	1	2	3	4	Prodotti
1	13 **(9)**	36	18	32	12
2	22	15	8	12	4
3	7	30	11	21	8
4	3	20	5	14	10
Richiesta	9	7	7	11	34

	2	3	4	Prodotti
1	36 **(3)**	18	32	3
2	15	8	12	4
3	30	11	21	8
4	20	5	14	10
Richiesta	7	7	11	25

	2	3	4	Prodotti
2	15 **(4)**	8	12	4
3	30	11	21	8
4	20	5	14	10
Richiesta	4	7	11	22

	3	4	Prodotti
3	11 **(7)**	21	8
4	5	14	10
Richiesta	7	11	18

	4	Prodotti
3	21 **(1)**	1
4	14	10
Richiesta	11	11

	4	Prodotti
4	14 **(10)**	10
Richiesta	10	10

La soluzione è z = 523

Metodo dei minimi costi:

	1	2	3	4	Prodotti
1	13	36	18	32	12
2	22	15	8	12	4
3	7	30	11	21	8
4	3 **(9)**	20	5	14	10
Richiesta	9	7	7	11	34

	2	3	4	Prodotti
1	36	18	32	12
2	15	8	12	4
3	30	11	21	8
4	20	5 **(1)**	14	1
Richiesta	7	7	11	25

	2	3	4	Prodotti
1	36	18	32	12
2	15	8 **(4)**	12	4
3	30	11	21	8
Richiesta	7	6	11	24

	2	3	4	Prodotti
1	36	18	32	12
3	30	11 **(2)**	21	8
Richiesta	7	2	11	20

	2	4	Prodotti
1	36	32	12
3	30	21 **(6)**	6
Richiesta	7	11	18

	2	4	Prodotti
1	36	32 **(5)**	12
Richiesta	7	5	12

	2	Prodotti
1	36 **(7)**	7
Richiesta	7	7

La soluzione finale è z = 624

Metodo di Vogel

	1	2	3	4	Prodotti	r_i
1	13 **(9)**	36	18	32	12	5
2	22	15	8	12	4	4
3	7	30	11	21	8	4
4	3	20	5	14	10	2
Richiesta	9	7	7	11	34	
q_j	4	5	3	2		

	2	3	4	Prodotti	r_i
1	36	18 **(3)**	32	3	14
2	15	8	12	4	4
3	30	11	21	8	10
4	20	5	14	10	9
Richiesta	7	7	11	25	
q_j	5	3	2		

	2	3	4	Prodotti	r_i
2	15	8	12	4	4
3	30	11 **(4)**	21	8	10
4	20	5	14	10	9
Richiesta	7	4	11	22	
q_j	5	3	2		

	2	4	Prodotti	r_i
2	15	12	4	3
3	30	21 **(4)**	4	9
4	20	14	10	6
Richiesta	7	11	18	
q_j	5	2		

	2	4	Prodotti	r_i
2	15	12	4	3
4	20	14 **(7)**	10	6
Richiesta	7	7	14	
q_j	5	2		

	2	Prodotti
2	15 **(4)**	4
4	20 **(3)**	3
Richiesta	7	7

La soluzione finale è z = 517

Algoritmo di Dantzig

Una volta individuata una soluzione di base iniziale, con uno dei metodi prima visti, bisogna individuare la soluzione ottima del problema dei trasporti. Una risoluzione mediante metodo del simplesso, risulterebbe alquanto pesante. Dantzig propose un metodo che si basa sul calcolo del cosiddetto *costo indiretto*. Tramite questo approccio dimostrò che:

1. per qualsiasi variabile x_{ij} appartenente ad una soluzione di base si possono determinare due valori (u_i, v_j) tali che $u_i + v_j = c_{ij}$, ove con c_{ij} si intende il *costo diretto*;
2. per qualsiasi variabile x_{ij} non appartenente ad una soluzione di base si possono determinare due analoghi valori (u_i, v_j) tali che $u_i + v_j = z_{ij}$ (*), ove con z_{ij} si intende il *costo indiretto*, ossia il costo che compete alla variabile non di base;
3. Il *criterio di ottimalità* è dato da: $(z_{ij} - c_{ij}) \leq 0,\ i = 1,2,\ldots,m,\ j = 1,2,\ldots,n$.

La procedura iterativa proposta da Dantzig si articola nei seguenti passi:

1. *Individuazione dei valori delle variabili aggiuntive.* Per determinare i valori delle variabili u_i e v_j, occorre risolvere un sistema di $m + n - 1$ equazioni (quante sono le variabili in base) in $m + n$ incognite (quanto sono le variabili aggiuntive) del tipo $u_i + v_j = c_{ij}$ in corrispondenza della variabile in base x_{ij}. Il problema è indeterminato e ammette infinite soluzioni dipendenti da un parametro arbitrario. Ponendo in una delle equazioni del sistema, una delle variabili aggiuntive uguale al corrispondente costo diretto (e quindi l'altra variabile duale eguale a zero) si possono determinare i rimanenti valori delle altre variabili per sostituzione.
2. *Individuazione della tabella dei costi indiretti.* A questo punto per determinare i valori u_i e v_j in corrispondenza delle variabili non di base, si costruisce una tabella con i seguenti criteri:
   - 2.1. si costruisce una tabella (m +1)* (n + 1) riportando nella prima riga, i valori di v_j, e nella prima colonna i valori di u_i precedentemente determinati, e nelle rispettive caselle i costi diretti delle variabili che compaiono nella soluzione di base;
   - 2.2. le rimanenti caselle vengono completate tenendo conto della (*).
3. *Condizione di ottimalità.* Se tutti i costi indiretti sono minori o eguali ai corrispondenti costi diretti (individuabili dalla tabella dei costi), si ha una soluzione ottima e la procedura termina; se invece, almeno un z_{ij} è maggiore di c_{ij} (e quindi la loro differenza è positiva), la

soluzione non minimizza la funzione obiettivo del problema di partenza e bisogna fare entrare in base una delle variabili non di base.

4. *Scelta della variabile non di base da far entrare in base.* Eccetto il caso in cui si ha una sola z_{ij} maggiore di c_{ij} per cui la scelta è scontata, in generale si sceglie quella variabile a cui corrisponde il $\max_{ij} \Delta_{ij} = (z_{ij} - c_{ij}) > 0$.

5. *Scelta della variabile di base da far uscire dalla base.* Si individua il *ciclo* righe/colonne che comprende la variabile da far entrare in base e quelle immediatamente vicine. Infatti è possibile rappresentare qualunque soluzione del problema dei trasporti in termini di un *grafo* in cui gli archi sono i segmenti orizzontali o verticali che uniscono (nella tabella di allocazione) le variabili di base. Per far entrare una variabile in base si parla di ciclo in quanto, per non mutare i totali di riga e di colonna, la quantità aggiunta alla variabile non in base deve essere tolta alle variabili in base e anzi una di esse deve alla fine avere valore nullo (esce dalla base). Il ciclo è sempre composto da un numero pari di vertici. Assegnando un valore θ alla variabile che entra in base, che consideriamo come vertice 1 del ciclo (ciò vale seguendo sia seguendo il ciclo in direzione oraria che antioraria), si dovrà sottrarre θ ai vertici di posto pari (2,4,...) e sommare θ a quelli di posto dispari (3,5,...). Sempre per rispettare i vincoli del problema originale (in questo caso $x_{ij} \geq 0$), θ non può essere maggiore della più piccola variabile di base di posto dispari. In tal modo non solo si individua il valore di θ e quindi della variabile che deve entrare in base, ma anche la variabile che esce dalla base.

6. *Nuova tabella di allocazione.* Si aggiorna la tabella di allocazione. A questo punto si è effettuata una iterazione della procedura risolutiva e il procedimento riparte dallo Step 1.

Esempio

Dato il problema:

	D_1	D_2	D_3	D_4	Tot
O_1	27	23	31	69	150
O_2	10	45	40	32	40
O_3	30	54	35	57	80
Tot	90	70	50	60	270

con soluzione base iniziale:

	D_1	D_2	D_3	D_4	Tot
O_1	27 **(90)**	23 **(60)**	31	69	150
O_2	10	45 **(10)**	40 **(30)**	32	40
O_3	30	54	35 **(20)**	57 **(60)**	80
Tot	90	70	50	60	270

con soluzione $z = 9580$.

Step 1.

$$\begin{array}{l} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{33} \\ x_{34} \end{array} \begin{cases} u_1 + v_1 = c_{11} = 27 \\ u_1 + v_2 = c_{12} = 23 \\ u_2 + v_2 = c_{22} = 45 \\ u_2 + v_3 = c_{23} = 40 \\ u_3 + v_3 = c_{33} = 35 \\ u_3 + v_4 = c_{34} = 57 \end{cases}$$

ponendo $u_1 = c_{11} = 27$ si ottiene: $v_1 = 0$, $v_2 = -4$, $u_2 = 49$, $v_3 = -9$, $u_3 = 44$, $v_4 = 13$.

Step 2.

$u_i \backslash v_j$	0	-4	-9	13
27	27	23	18	40
49	49	45	40	62
44	44	40	35	57

Step 3.

Si vede che $z_{21} = 49 > c_{21} = 10$, $z_{24} = 62 > c_{24} = 32$, $z_{31} = 44 > c_{31} = 30$. La soluzione non è ottima.

Step 4.

La variabile da far entrare in base è la x_{21}, in corrispondenza della quale il $\Delta = 39$ è massimo.

Step 5.

	D_1	D_2	D_3	D_4	Tot
O_1	**90 - θ**	**60 + θ**			150
O_2	θ	**10 - θ**	**30**		40
O_3			**20**	**60**	80
Tot	90	70	50	60	270

Elementi del ciclo

$\theta = 10$, per cui si avrà: $x_{11} = 80$, $x_{12} = 70$, $x_{11} = 80$, $x_{21} = 10$, $x_{22} = 0$.

Step 6.

	D_1	D_2	D_3	D_4	Tot
O_1	27 **(80)**	23 **(70)**	31	69	150
O_2	10 **(10)**	45	40 **(30)**	32	40
O_3	30	54	35 **(20)**	57 **(60)**	80
Tot	90	70	50	60	270

con soluzione $z = 9190$. Si è avuto un miglioramento di 9580 - 9190 = 390 corrispondente a $(45\times10)-(10\times10)+(27\times10)-(23\times10)=390$

Si vedrà che tale soluzione non è ottima. Procedendo in questo modo alla fine si otterrà la soluzione ottima con valore $z = 8910$.

Caso di infinite soluzioni ottime

Applicando il criterio di ottimalità del metodo di Dantzig può accadere che nell'ultima iterazione si abbia, per una variabile non di base $(z_{ij} - c_{ij}) = 0$. Facendo entrare in base la variabile in questione (che è l'unica a poterlo fare) la funzione obiettivo non cambia e quindi si ottiene una nuova soluzione ottima di base. Ciò non presenta un problema in quanto già si è raggiunto l'ottimo, ma comunque va sottolineato che avendo due o più soluzioni ottime, si possono generare infinite soluzioni ottime derivate per mezzo di una combinazione lineare.

Caso di soluzione degenere

Quando con l'individuazione della soluzione di base iniziale, le variabili non nulle sono in numero minore di $(m + n - 1)$, si ha una soluzione di base degenere. In questo caso si può trattare la variabile di base nulla allo stesso modo delle altre, nella procedura di Dantzig.

Un metodo più preciso, però, prevede l'eliminazione di ogni possibilità di degenerazione sin dalla soluzione iniziale, modificando i totali a_i e b_j, aggiungendo ad ogni a_i la quantità ε. In pratica si ha:

$$\bar{a}_i = a_i + \varepsilon,\ i = 1,2,\ldots,m$$

$$\bar{b}_j = b_j,\ j = 1,2,\ldots,(n-1)$$

$$\bar{b}_n = b_n - m\varepsilon$$

con ε valore piccolo a piacere.