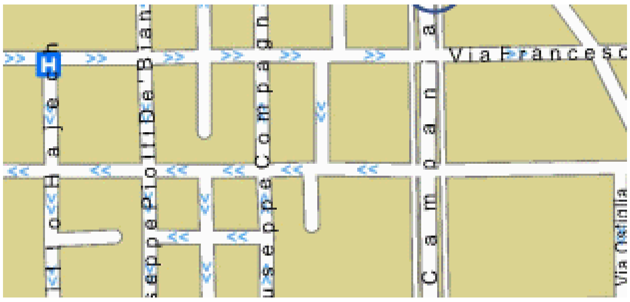
Geometria del taxi

È un particolare tipo di geometria non euclidea, la cui creazione è dovuta a Minkowski.

In realtà il discorso in Minkowski è un bel po' diverso… si lavora nel continuo, cioè nel piano $\mathbb{R}^2$ e non nel discreto $\mathbb{Z}^2$ come nel caso di questa geometria, e il fatto di essere nel discreto aggiunge parecchi problemi che nel continuo sono trattati in modo molto diverso e che vedremo tra poco, ma aggiunge anche fascino a questo studio…



Possiamo pensare di schematizzare il piano con una griglia, a maglie quadrate, rappresentanti le strade (diciamo, per fissare le idee, orizzontali o verticali) di una città ideale. In sostanza è come pensare di lavorare su un piano quadrettato, come un foglio da quaderno. I taxi si muovono, ovviamente, lungo le strade della città stessa, quindi vanno da un punto all'altro cercando i percorsi di minima lunghezza che congiungono due punti.

Rispetto alla geometria euclidea cambia il concetto di **distanza**: invece che "in linea d'aria" si deve calcolare la distanza sulla strada, dal momento che il "taxi" percorre le strade della città.

Quindi se $P \equiv (x_0, y_0)$ e $Q \equiv (x_1, y_1)$ la distanza PQ invece di

$$\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \qquad \text{vale} \qquad |(x_1 - x_0)| + |(y_1 - y_0)| .$$

Detto infatti **v** il vettore PQ entrambe queste funzioni godono delle proprietà della **norma**:

- Positività $\|\mathbf{v}\| > \mathbf{0}$ se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ e $\|\mathbf{v}\| = \mathbf{0}$ solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
- Omogeneità $\|k\mathbf{v}\| = |k|\,\|\mathbf{v}\|$.
- Disuguaglianza triangolare $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ (il segno = vale solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{v} = k\,\mathbf{w}$).

I problemi sono svariati.

Il primo problema che ci obbliga ad una scelta è il seguente: si devono considerare solo i punti a coordinate intere o anche i punti intermedi? È chiaro che un taxi vero deve percorrere le strade, non può attraversare i caseggiati ma per il resto la scelta non è univoca:

- si possono considerare solo i punti a coordinate intere, e in questo caso le distanze sono sempre numeri interi, in quanto si misurano, sostanzialmente, in "numero di lati di caseggiati" che il taxi deve contornare per passare da un punto ad un altro, quindi si tratta di una geometria discreta: l'**insieme numerico** su cui è costruita è $\mathbb{Z}$. (questa è la scelta di molti autori, e che sarà fatta anche in questo studio)
- Si possono considerare anche i punti che hanno una sola coordinata intera, e quindi sono su una strada, o orizzontale o verticale, tra due incroci adiacenti in una direzione. (Questa è la scelta di Eugene F. **Krause** in *Taxicab Geometry* - Dover)

I **punti** e così pure tutti gli oggetti che definiremo e disegneremo saranno dunque in realtà costituiti solo dai punti, non dai tratti di strada che li congiungono e che servono solo per visualizzarli meglio. La diversità della norma o distanza di due punti è però quello che fa cambiare molte cose.

Nella figura 1 sono rappresentati dei **segmenti** che congiungono due punti del piano. Solo nel primo caso, in cui i due punti sono su una stessa via, il segmento (percorso di minima lunghezza) tra i due punti coincide con la definizione di segmento euclidea.

Si noti che negli altri casi, ogni spezzata contenuta nel "rettangolo di ingombro" dei due punti dati (in giallo nella figura) va altrettanto bene, purché segmenti paralleli siano equi–orientati; tutte le spezzate hanno infatti la medesima lunghezza.

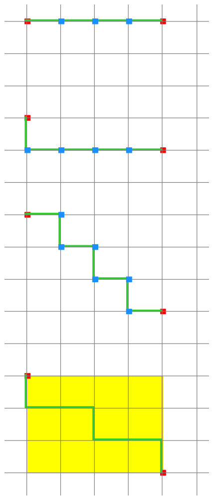


Figura 1: segmenti

Il che vuole però anche dire che ogni punto del rettangolo gode di quella che viene chiamata **identità segmentaria** e che nella geometria euclidea caratterizza (insieme ad altre proprietà) le rette: nella geometria euclidea tre punti A, B, C sono allineati se $AB+BC=AC$ (stiamo parlando delle lunghezze dei segmenti).

E allora, **quanti sono i segmenti tra due punti**? Non basta dare la distanza tra i due punti, ma anche le dimensioni del rettangolo di ingombro. Diciamo b la base e h l'altezza del rettangolo che ha come vertici opposti i due punti. La distanza è $b + h$; il numero di segmenti tra i due punti sono quanti le disposizioni con ripetizione di due oggetti (g=giù e d=destra) di cui b uguali a d e h uguali a g.

Quindi nella geometria del taxi esistono delle figure assolutamente impreviste: i **biangoli** (figura 2) che sarebbe meglio forse chiamare **bilati**: nella geometria elementare si usa a volte la terminologia dei poligoni che mette in evidenza i lati, e a volte quella che mette in evidenza gli angoli (cioè non si usa dire trilati ma triangoli, mentre si usa quadrilateri e non quadrangoli). Nella geometria del taxi gli angoli non sono definiti (ci sono i vertici, ma gli angoli sono tutti "retti" per così dire, non ha tanto senso però parlare di angoli).

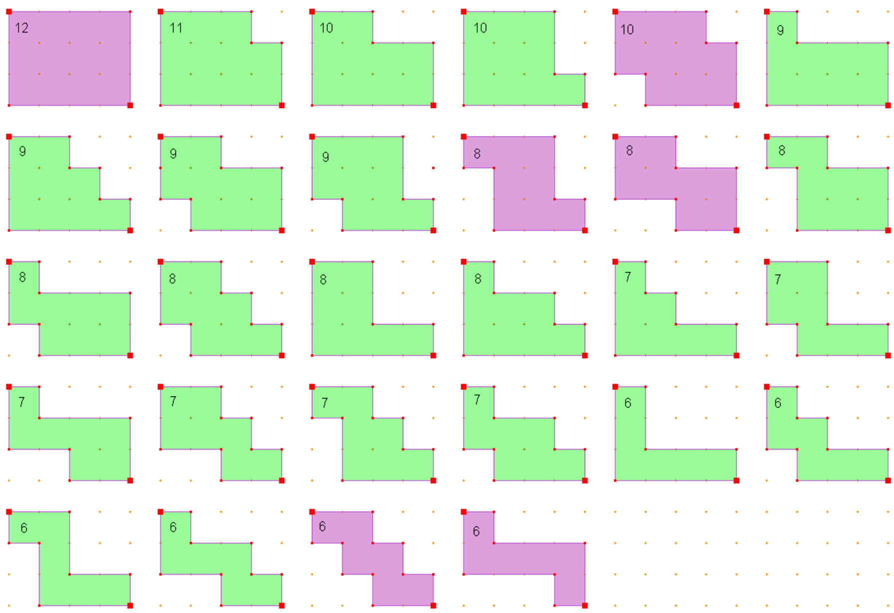


Figura 2: biangoli

I bilati della figura 2 hanno tutti gli stessi due vertici e come si vede la loro **area** (numero dei quadrati contenuti) varia tra un minimo di 6 e un massimo di 12. Quelli di colore verde ne ammettono uno "simmetrico", che non è stato disegnato, mentre quelli viola sono già simmetrici, quindi vanno contati una volta sola. Esistono bilati simmetrici solo con area pari.

Ci si possono ovviamente porre molte domande:

- Ce ne sono altri, con gli stessi due vertici, a meno di simmetrie?
- È possibile sapere a priori quanti saranno i bilati **non intrecciati** tra due punti in funzione della reciproca posizione (guardiamo anche b e h del rettangolo di ingombro)?
- Che legame ha l'area minima e l'area massima del bilato con la distanza tra i punti? E con le dimensioni del rettangolo di ingombro? (cioè la domanda è: dati i due punti e conoscendo il ret-

tangolo di ingombro, si possono calcolare l'area minima e massima dei bilati senza disegnarli?)

La risposta alla terza domanda è abbastanza semplice:

- l'area massima è $b \cdot h$ (corrispondente al rettangolo, prima figura)
- l'area minima è $b + h - 1$ (corrispondente ad esempio al poligono a forma di "L", anche se non sempre è l'unico ad avere tale area)

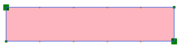
La risposta alla seconda è più difficile e coincide col contare quanti bilati esistono di data area (compresa tra il massimo e il minimo, ovviamente), in funzione di b e h.

Nel caso della figura 2 ce ne sono, contando anche i simmetrici:

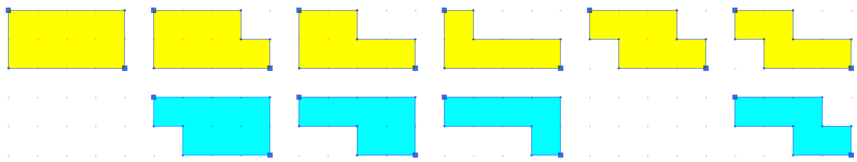
1 di area 12, 2 di area 11, 5 di area 10, 8 di area 9, 12 di area 8, 12 di area 7, 8 di area 6.

Ma il lato 7 si può ottenere anche (pensando a $b \geq h$, per fissare le idee) con un rettangolo di ingombro con b=5 e h = 2, o con b= 6 e h = 1, o anche con b=7 e h =0, ma in questo caso non c'è un bilato corrispondente.

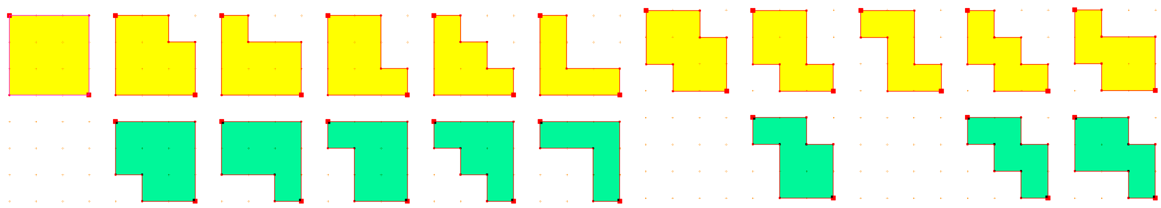
Ecco un altro disegno, che si riferisce a tutti i bilati i cui lati sono lunghi 6, con vari b e h.

b=6 e h =0 ovviamente nessuno, b=5 e h =1 (1 solo)  .

b=4 e h =2 (6+4 simmetrici, in azzurro)



b=h=3 (11 + 8 simmetrici, in verde)



Come possiamo ragionare per contarli???

Se è chiaro come sono fatti i segmenti, le **rette** come sono fatte?

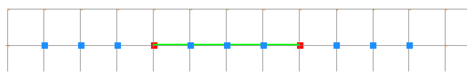


Figura 3: retta

Due punti distinti, nella geometria euclidea, individuano un segmento; nel caso di questa geometria i segmenti che congiungono due punti distinti sono più di uno (e quindi chiaramente non si tratta di una geometria affine, ma lo sapevamo già in anticipo), ma ciascuno di tali segmenti come prosegue dalle due parti per ottenere una retta? Tra l'altro questo è il metodo con cui Euclide definisce le rette….

I segmenti tra due punti sono in numero finito, ci sono infinite rette per due punti o sono tante quante i segmenti?

Nel caso del primo dei segmenti disegnati nelle figura 1 non c'è dubbio, quella di figura 3 è l'unica retta possibile, ma questo è l'unico caso ovvio, c'è un solo segmento tra i due punti.

Nel caso però in cui i due punti non stiano su una stessa direzione principale, la cosa si complica. **Una ipotesi** è quella di continuare con lo stesso pattern cioè con la stessa conformazione, lo stesso disegno. Nella figura 4 c'è un esempio di come si pone il problema, sul secondo dei segmenti della figura 1:

- nel primo caso il disegno è proprio lo stesso e l'identità segmentaria è soddisfatta.
- Nel secondo caso, invece, è identico il rettangolo d'ingombro del segmento *BC* rispetto a quello del segmento *AB*, che però è posizionato in modo diverso, e risulta *AB*=5, *BC*=5 ma *AC*=8, quindi la scelta è da scartare, questa non è una retta: *ABC* è un triangolo…
- Il terzo caso considera i rettangoli d'ingombro posizionati sempre nello stesso modo, come nel primo caso, ma il segmento *AB* è, rispetto a *BC* posto in modo diverso sul rettangolo. Questa sembra proprio soddisfare le condizioni come nel primo caso per quanto riguarda *A*, *B*, *C*, e punti intermedi, ma non per gli altri punti a sinistra di *A* … In ogni caso pone dei problemi per altre questioni inerenti i rapporti tra punti e rette e le loro distanze.

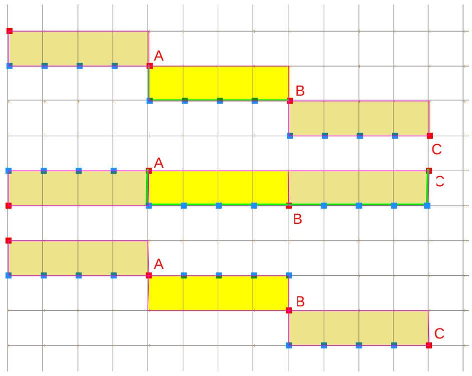


Figura 4: ancora sulle rette…

Se vogliamo seguire Euclide il più possibile, definiremo la distanza di un punto da una retta come il minimo delle distanza tra il punto e il punto variabile sulla retta. Nel terzo caso, se consideriamo i due punti a distanza 4 da *A*, ma con Δx =2 e Δy=2 il primo e $\Delta x = -2$ e Δy=2 il secondo, la loro distanza dalla retta è 2. Ma se facciamo lo stesso per *B* la distanza del primo è 3, quella del secondo 1. Questa discrepanza fa propendere la scelta per il primo caso.

E se il rettangolo di ingombro fosse più complicato, dando luogo a più di due segmenti, cosa cambia? Cioè: pur di riportare il rettangolo di ingombro in modo "rettilineo" e quindi i punti di base (O e D nel disegno) in modo tale che stiano "in linea d'aria" su una retta euclidea, qualunque segmento che congiunga tali punti andrebbe quindi bene? La prima scelta tra quelle precedentemente esposte dà un modo univoco di rappresentare una retta per due punti **prolungando** all'infinito un segmento.

C'è comunque un problema… due rette non è detto che si intersechino solo in un punto, possono avere un segmento in comune.

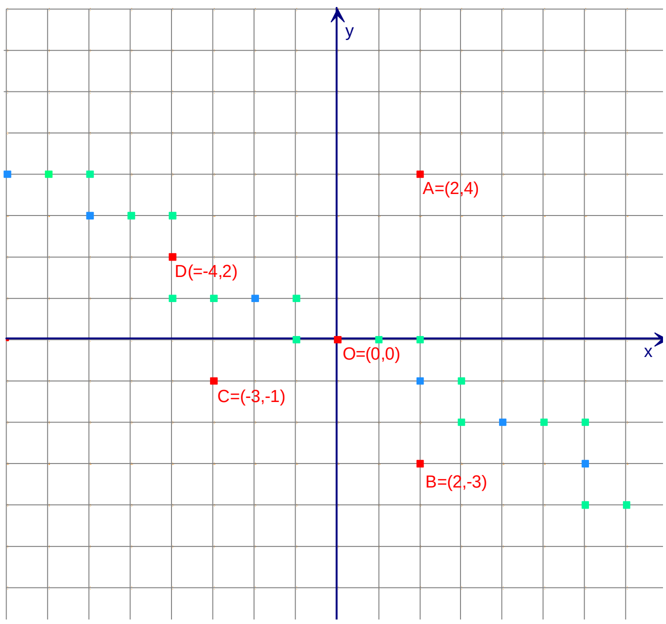


Figura 5: coordinate dei punti

Si può provare a cambiare punto di vista.

Invece di pensare solo ai punti, pensiamo alle **equazioni**.

Nella geometria euclidea le rette sono date da equazioni lineari, della forma $ax + by + c = 0$.

Utilizziamo quindi un sistema di riferimento, in modo da dare coordinate ai punti (e risulteranno ovviamente coordinate intere, come in figura 5, in cui sono indicati vari punti (rossi) nei vari quadranti). Consideriamo ora, ad esempio, i due punti *O* e *D*. La retta che li congiunge, nella geometria euclidea, ha equazione $2y + x = 0$. Oltre ai punti *O* e *D* sicuramente appartengono al luogo dato da tale equazione i punti disegnati in blu sulla figura, che soddisfano l'equazione. E in mezzo a tali punti? Nessun altro punto del piano soddisfa l'equazione, ma il taxi deve fare un percorso continuo, non può saltare da un punto all'altro, quindi i punti blu saranno congiunti dai punti azzurri che, un po' a caso, appartengono a vari segmenti che li congiungono.

Questo ragionamento porta però a ritornare su quanto già detto a proposito dei segmenti, che sono porzioni di rette. In nessuno degli esempi della figura 1 si pone il problema.

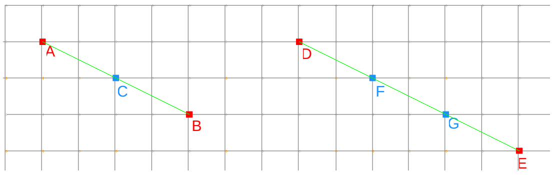


Figura 6: segmenti

Ma nella figura 6, le coppie di punti indicati possono essere congiunte anch'esse da vari segmenti, ma che non potrebbero essere completamente liberi. Ad esempio il segmento *AB* deve passare per *C*, il segmento *DE* deve passare per *F* e *G*. Sono i punti a coordinate intere appartenenti ai segmenti euclidei (verdi nella figura 6) tracciati tra gli estremi. Questo sembra in contrasto con quanto detto e pone un vincolo che non sembra necessario per la geometria del taxi.

Questa scelta quindi, invece di quella della assoluta libertà, semplifica solo parzialmente, in alcuni casi, il problema di come siano fatte le rette, ma presuppone, cosa infatti **non affatto chiara**, che le rette della geometria del taxi siano individuate da equazioni di primo grado, che però caratterizzano solo alcuni punti delle rette stesse.

C'è di mezzo quello che in letteratura è il "patto narrativo". Cioè dobbiamo aggiungere ipotesi perché il nostro "racconto" sia aderente a una qualsiasi delle ipotesi possibili. Per questo è tanto divertente…

Non manteniamo questa ipotesi, distinguendo tra **rette** cioè prolungamenti di segmenti e luoghi individuati da equazioni lineari.

La geometria analitica della geometria del taxi va completamente ristudiata…

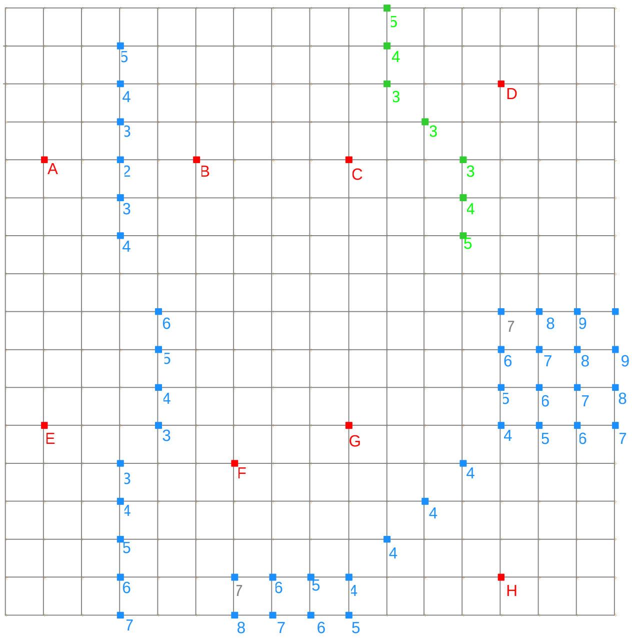


Figura 7: assi di segmenti

Sempre nello studio dei **luoghi di punti** si può provare a vedere come è fatto, ad esempio, il luogo dei punti equidistanti da due punti dati. Nella geometria euclidea tale luogo è detto **asse del segmento** che congiunge i due punti, ed è la retta perpendicolare al segmento passante per il punto di mezzo dello stesso.

Ma in questa geometria, c'è **un** punto di mezzo? Se la distanza tra due punti è pari ($2k$), ci può essere un punto, o più di uno, che ha distanza k dai due punti, nella figura 7:

- *AB*=4 e c'è 1 punto che ha distanza 2;
- *EF*=6 e ci sono 2 punti che hanno distanza 3;
- *CD*=6, ma in questo caso i punti che hanno distanza 3 dai due punti sono 3;
- *GH*=8 e ci sono 5 punti a distanza 4 da entrambi.

Perché questa diversità di risultati?

Se oltre alla distanza tra i due punti guardiamo anche il Δx e il Δy notiamo che:

- nel caso di *A* e *B* è Δx=4 e Δy=0, quindi si può dimezzare il solo Δx (anche Δy, ma 0/2=0).
- Nel caso di *E* e *F*, Δx=5 e Δy=1; nessuno dei due si dimezza in numeri interi, ma dividendo Δx

come 2+3 e aggiungendo Δy alla parte lunga 2 si hanno i due punti indicati.

- Nel caso di C e D, Δx=4 e Δy=2; dimezzandoli entrambi si ha uno dei tre punti, dividendo Δx=1+3 e aggiungendo Δy alla parte più piccola si hanno gli altri due.
- Ragionamento analogo per G e H.

Osserviamo i luoghi ottenuti nella figura 7. Nel caso di A e B si ottiene proprio quello che ci si poteva aspettare. Nel caso di E e F come nel caso di C e D si ottiene un luogo che se visivamente non sembra una retta, tuttavia continua indefinitamente da entrambi i lati lungo una strada (circa "verticale" perché $\Delta x > \Delta y$). Il caso veramente strano è quello dei due punti G e H. In questo caso nel rettangolo di ingombro dei due punti (che è un quadrato) ci sono tutti punti che hanno dai due estremi distanza metà di quella tra i punti, all'esterno, tutti gli infiniti punti dei quadranti (di cui in figura è segnato solo l'inizio) sono punti del luogo, quindi si riempiono due porzioni di piano.

Se invece la distanza dei due punti è dispari non c'è alcun punto che sia equidistante da entrambi, quindi il luogo è vuoto.

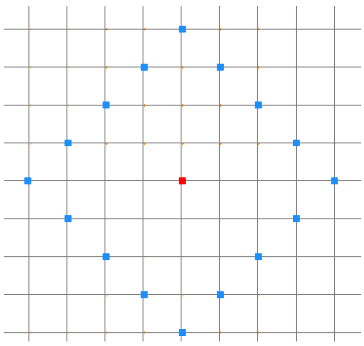


Figura 8 : circonferenza

Altro luogo legato solo alla distanza è la **circonferenza**, definita come di consueto, come il luogo dei punti equidistanti da un punto detto centro.

In qualunque posizione sia il punto sulla griglia la circonferenza risulta sempre avere la forma di un quadrato con le diagonali disposte lungo la griglia. Come si vede nella figura 8, se il raggio è lungo 4, la lunghezza della circonferenza è 32 per cui il corrispondente del rapporto π della geometria euclidea, cioè al rapporto tra circonferenza e diametro, non è 3,14 ma quattro.

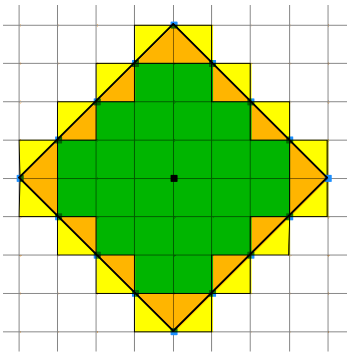


Figura 9: area di un cerchio

Se però vogliamo valutare la area di questo cerchio, il problema si complica: dobbiamo considerare solo la zona arancione o tutta la zona gialla della figura 8? È chiaro che il taxi non può percorrere il esattamente il perimetro del quadrato arancione, quindi deve congiungere i vari punti e come li congiunge cambia di molto la area del cerchio. L'area massima possibile è 40 ed è quella del poligono giallo, l'area del quadrato arancione vale 32, l'area minima è 24 ed è quella del poligono verde; sono però possibili anche valori intermedi che dipendono dalla strada che vuole seguire il taxi.

Passiamo ora a studiare i **triangoli**.

Dati tre punti, detti **vertici**, essi vanno congiunti con segmenti (i **lati**), in modo tale però che nei vertici ci siano effettivi **angoli**, quindi i "pezzi" di lati non devono sovrapporsi né essere sulla stessa linea verticale o orizzontale, come nella figura 10.

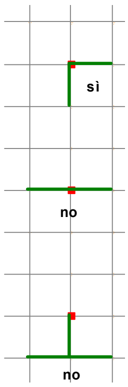


Figura 8 : vertici

I triangoli si suddividono, come nella geometria euclideo, in:

- equilateri (tre lati della stessa lunghezza)
- isosceli (due lati della stessa lunghezza)
- scaleni.

Si osservi che "della stessa lunghezza" non vuol dire della stessa forma.

Nessuna altra suddivisione ha senso, visto che gli angoli non si possono definire.

Nella figura 11 ci sono esempi di triangoli equilateri, che come si vede hanno aspetti completamente diversi da quelli della geometria euclidea; i due sulla destra hanno gli stessi vertici, ma lati diversi (anche se della stessa lunghezza) e aree diverse; i due sulla sinistra hanno i vertici che sembrano in posizioni tali da poter dar luogo a figure "simmetriche", ma non è così per quella in alto, che non può in nessun modo essere simmetrica (quella in basso invece può esserlo, come in figura, ma non è necessario). A parte che si è portati a pensare alla simmetria nel senso della geometria usuale, ma qui simmetrico vuol dire che ogni vertice sta sull'asse del lato opposto… o no?

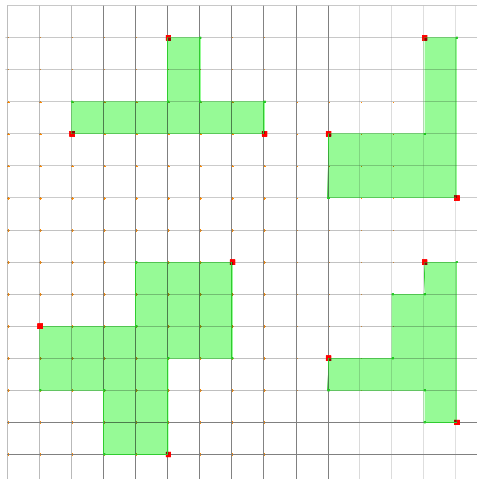


Figura 9: triangoli equilateri

Ci si può chiedere:

- Dato un segmento, esiste sempre un triangolo equilatero che ha quel segmento come lato? La risposta è negativa, per quanto detto i lati devono avere la stessa lunghezza, quindi la lunghezza del lato dato deve essere pari, perché non esiste l'asse di un segmento di lunghezza dispari.

- Dato un segmento opportuno, come sono disposti i terzi vertici di tutti i triangoli equilateri che hanno il dato segmento come lato? Possiamo rispondere pensando alla costruzione euclidea con riga e compasso: disegniamo due circonferenze con vertice rispettivamente in uno dei due estremi del segmento e passante per l'altro e poi cerchiamo i punti comuni alle due circonferenze. E allora la domanda diventa immediatamente: ma esistono sempre punti comuni alle due circonferenze? Ciascuna circonferenza passa per il centro dell'altra. La risposta nel caso euclideo è evidentemente positiva (ed esistono sempre esattamente due triangoli siffatti). E in questa geometria? La risposta, come si vede dalla figura 12, dipende da come sono posti l'uno rispetto all'altro i due centri delle circonferenze; comunque, come già detto sopra, si vede anche per questa via che la distanza dei due centri deve essere pari, altrimenti non ci sono triangoli equilateri; nel caso in cui siano pari però, non è detto che siano solo due, come nella geometria euclidea. Il fatto poi che i vertici siano due, ancora non vuol dire che siano solo due i triangoli… un po' di calcolo combinatorio potrebbe permettere di fare il conto di quanti sono effettivamente, ma esula da questo breve escursus…

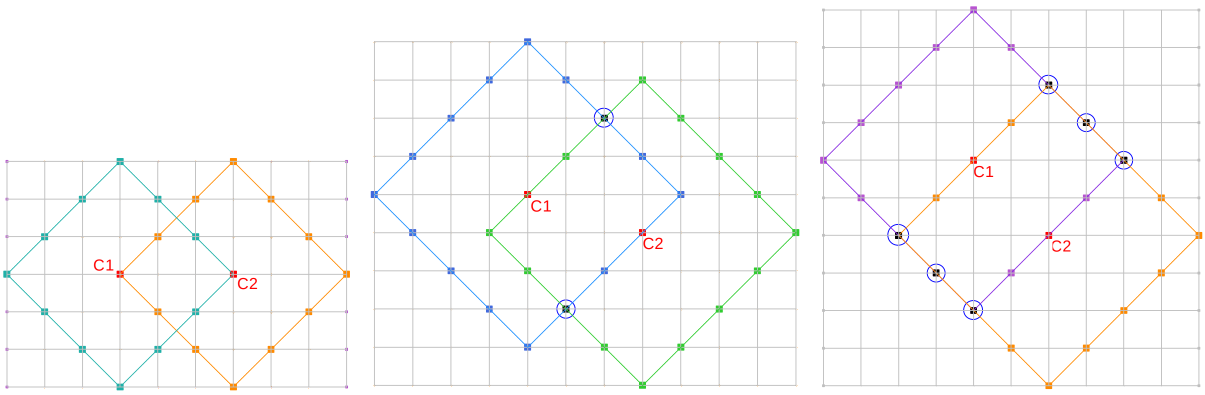


Figura 10 : possibili vertici di triangoli equilateri

- Dato un segmento, come sono disposti i terzi vertici di tutti i triangoli **isosceli** che hanno il dato segmento come lato diverso? Ovviamente sono i punti dell'asse del segmento stesso, che quindi deve avere lunghezza pari.

- Quali dei punti e delle rette notevoli del triangolo ha senso definire in questa geometria? E quali sono univocamente determinati? A volte esiste, ma non sempre è univocamente determinato, il punto medio di un segmento, e di conseguenza quindi esistono le mediane e come abbiamo visto, gli assi dei lati, ma non è possibile definire né altezze né bisettrici, visto che non sono definiti gli angoli, e quindi non è definita la perpendicolarità. O meglio, per le altezze non c'è nulla da fare, ma per le bisettrici… al solito, dobbiamo adattare la definizione. Sicuramente non possiamo definire la bisettrice come retta che dimezza un angolo, ma possiamo usare la proprietà che è una retta i cui punti sono equidistanti dai lati dell'angolo stesso (col problema che le rette hanno una definizione un po' diciamo "ambigua") dobbiamo comunque tener conto l'ipotesi che abbiamo fatto sui vertici di un poligono, se ci interessano le eventuali bisettrici di un triangolo; se vogliamo invece le bisettrici di una coppia di rette qualsiasi il discorso può essere un po' diverso (figura 11).

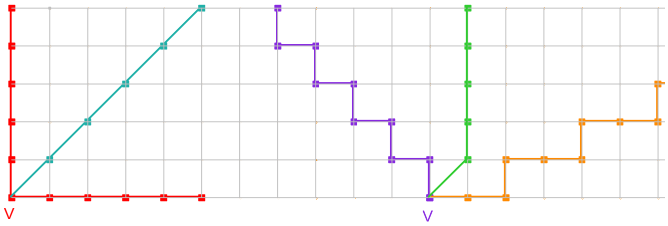


Figura 11 Le bisettrici di due angoli di triangoli

- Dunque l'ortocentro (punto di incontro delle altezze) non può esistere, mentre si può provare a parlare di circocentro (centro del cerchio circoscritto, cioè che passa per i tre vertici, che sta sul punto di incontro degli assi), baricentro (punto di incontro delle mediane), incentro (centro del cerchio inscritto, che sta nel punto di incontro delle bisettrici, ma cosa è mai un cerchio inscritto??).

- Allora: un triangolo è sempre inscrittibile in una circonferenza? Nella geometria euclideo si è detto che il centro di questa circonferenza deve appartenere all'asse di due dei suoi lati e quindi anche del terzo; in questa geometria non è detto che esistano tali assi, ma a volte esistono. Nella figura 12 si vede un cerchio circoscritto ad un triangolo equilatero.

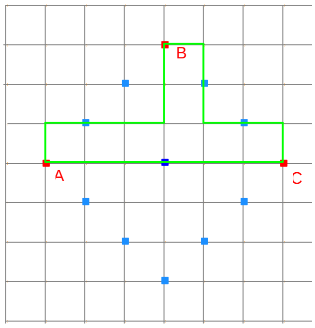


Figura 12 : cerchio circoscritto

- Nella geometria euclidea esiste un solo cerchio circoscritto ad un triangolo qualsiasi; sarà vero anche in questo caso? Poiché era visivamente semplice è stato scelto, nella figura 12, come centro della circonferenza il punto medio del segmento AC. Proviamo a costruire i luoghi dei punti equidistanti dai punti A e B e dai punti A e C. Nella figura 14 si vedono in viola i punti dell'asse del segmento di estremi A e B, ed blu i punti comuni a questo asse e a quello di AC, che sono neri. Allora tutti punti blu possono essere centri di circonferenza circoscritte a quel particolare triangolo. Nella figura 15 ne sono mostrati alcuni.

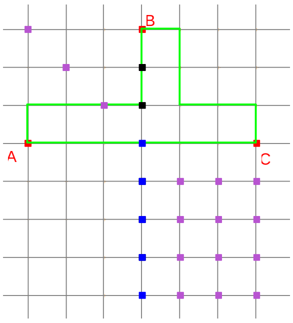


Figura 14 assi di due lati

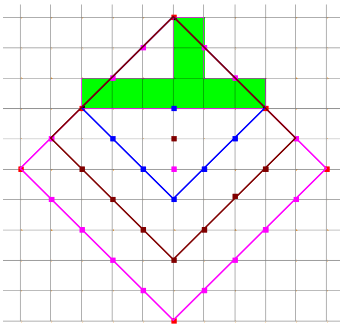


Figura 13 vari cerchi circoscritti

Lasciamo lo studio degli altri eventuali punti notevoli a chi volesse approfondire l'argomento.

I quadrilateri non presentano sostanziali diversità dai triangoli; una loro suddivisione relativa alla lunghezza di lati è

- Equilateri: tutti e quattro i lati uguali (nella geometria euclidea sono i quadrati e i rombi)
- Biisosceli: due lati uguali tra loro come pure gli altri due (nella geometria euclidea sono in generale tutti i parallelogrammi e gli “aquiloni”, anche se questa nomenclatura non è usuale)
- Isosceli: una coppia di lati uguali (nella geometria usuale sono di questo tipo i trapezi isosceli)
- Scaleni.

Non ha senso parlare di parallelogrammi, dal momento che gli angoli non sono definiti, manteniamo la stessa convenzione sui vertici.

Anche nel caso dei quadrilateri è difficile individuare una formula per l’area di visto che esiste un'area minima possibile e un'area massima possibile: è interessante, data del piano una quaterna di punti, individuare i quadrilateri di aria minima e di area massima e vedere quanti ne esistono (a meno di trasformazioni rigide del piano).

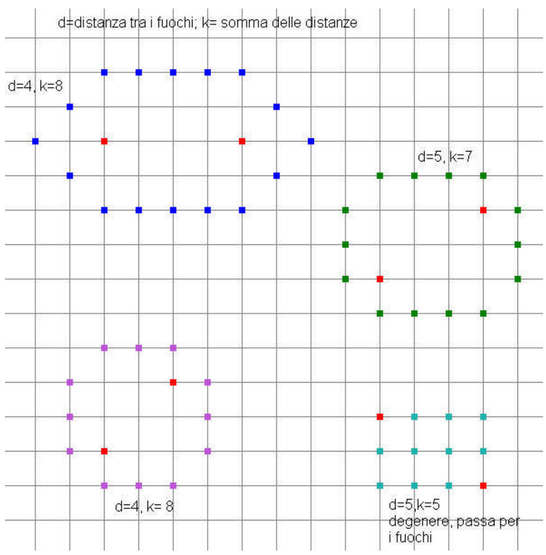


Figura 15 varie ellissi

Possiamo continuare lo studio cercando cosa si può dire nel caso delle coniche che è possibile definire come luoghi geometrici di punti; abbiamo detto che la definizione tramite equazioni non può essere trasportata pari–pari da quella euclideo.

I casi più semplici sono quelli dell'iperbole e dell’ellisse perché si possono definire a partire dai due fuochi e quindi solo da distanze fra punti, mentre nel caso della parabola è necessario un fuoco e la direttrice e abbiamo visto che problemi ci sono a definire una retta.

La definizione di ellisse (luogo geometrico dei punti la cui somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi è costante: $PF_1 + PF_2=k$) porta ai luoghi di figura 15, a seconda della disposizione dei fuochi nel piano.

La loro forma è abbastanza simile a quella euclidea, a parte quello degenere sulla destra, in cui la distanza focale è uguale alla somma delle distanze dei due punti dai fuochi. Tale ellisse è degenere anche nella geometria euclidea.

Una iperbole è il luogo dei punti del piano tali che la differenza delle distanze da due punti fissi detti fuochi è costante $|PF_1 - PF_2|=k$ (serve il valore assoluto poiché k deve essere positivo; si hanno così i due rami dell’iperbole).

Come nella geometria euclidea le ellissi sono curve chiuse mentre le iperboli sono formate da due rami che si estendono all’infinito.

Come si vede dalla figura 16, non sono però tutte dello stesso genere, e la loro forma dipende dalla posizione dei fuochi e dal rettangolo di ingombro individuato dai medesimi.

- Se il valore della costante k fa sì che i vertici del rettangolo di ingombro appartengano al luogo, l’iperbole riempie quarti di piano, come nel caso dei fuochi C_1 e C_2.

- Se k è minore del più piccolo tra Δx e Δy ha due rami come una iperbole del piano euclideo, diretti come le strade (casi dei fuochi A_1 e A_2 o B_1 e B_2).
- se k è maggiore del più piccolo tra Δx e Δy ha due rami che terminano su strade parallele, come nel caso dei fuochi F_1 e F_2 o D_1 e D_2.

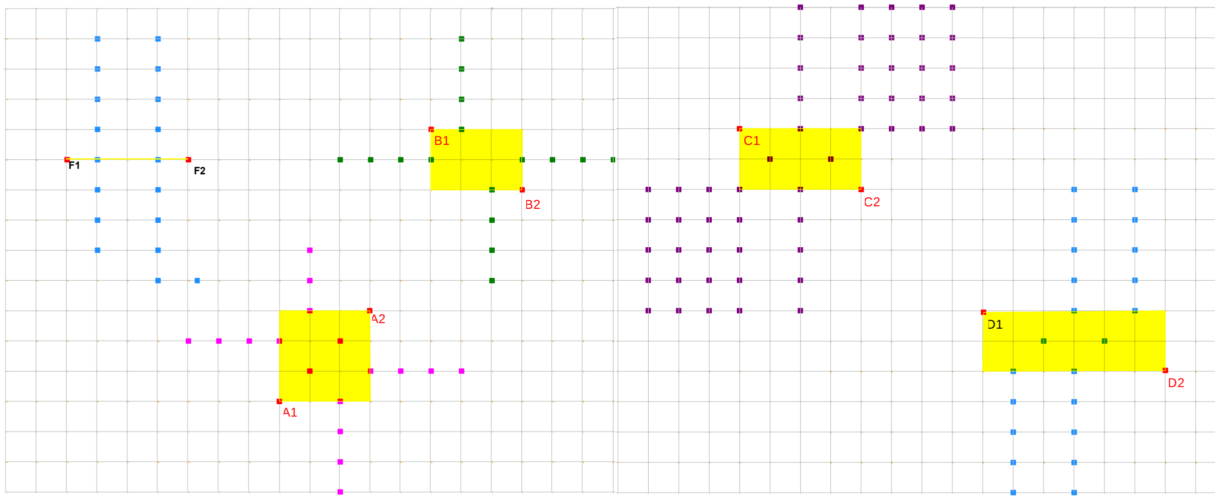


Figura 16 Iperboli

La **parabola** infine è definita come il luogo dei punti equidistanti da un punto, detto **fuoco** e da una retta, detta **direttrice**. (una definizione simile vale anche per ellisse e iperbole, introducendo il concetto di eccentricità, nella geometria euclidea, e andrebbe opportunamente rimaneggiata per introdurla anche in questo caso).

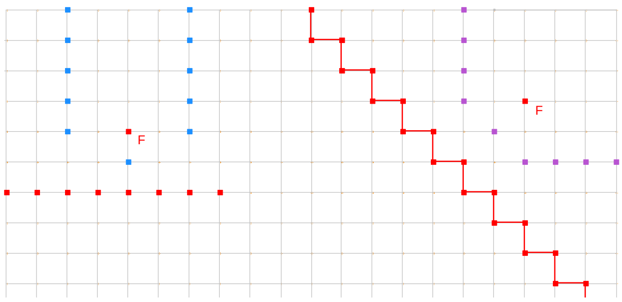


Figura 17 parabole

Nella figura 17 sono rappresentate due parabole, in una condizione "buona" e la loro forma non desta particolare meraviglia, assomiglia abbastanza a quelle della geometria euclidea. La distanza di un punto da una retta è, come nella geometria euclidea, la minima distanza tra il punto e i punti della retta, Nella ulteriore figura 18 sono "ammassate" varie parabole: le rette sono diverse (sempre con una conformazione regolare dei motivi che le compongono, come detto sopra), ma i risultati sono molto diversi, tra l'altro si vede come una posizione diversa del fuoco rispetto alle direttrici, che sono le stesse, dia luogo a conformazioni diverse; ci sono parabole con un ramo solo e altre con tre rami; è solo un divertimento vedere come varia la figura al variare delle rette e dei punti.

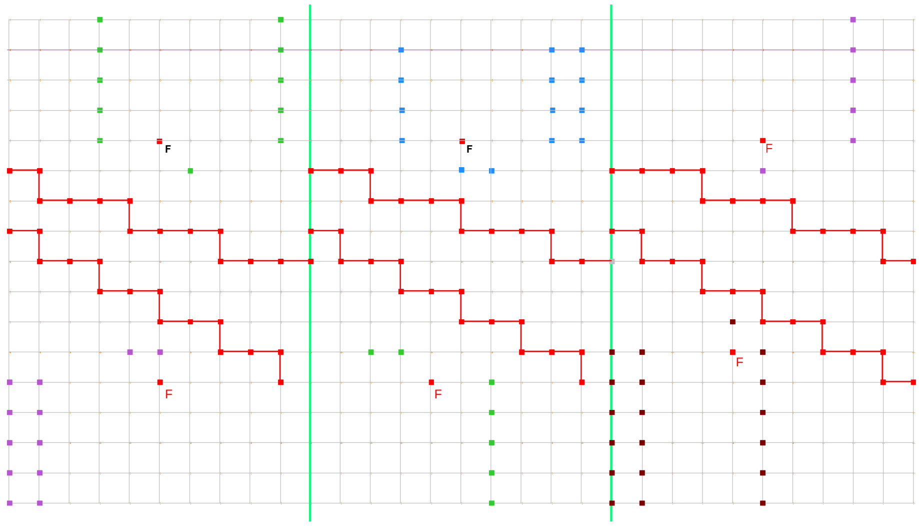


Figura 18 altre parabole